ЛЕКЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: Математика-часть 2

Код дисциплины: Mat 1227

Название и шифр ОП: 6В07201«Технология фармацевтического производства»

Объем учебных часов/кредитов: 150/5

Курс и семестр изучения: 1/2

Объем лекций: 10 (часов)

Шымкент, 2025 год

Лекционный комплекс разработан в соответствии с рабочей учебной программой дисциплины (силабусом) «Математика – часть 2» и обсужден на заседании кафедры

Протокол №12а от «28» 05 2025 г.

Зав. кафедрой, к.ф-м.н., асс.проф. ____________ Иванова М.Б.

Лекция № 1

1.Тема : Случайные события и вероятность
2. Цель: Научить рассчитывать вероятности событий и качества в фармацевтическом производстве.
3.Тезисы лекции:
План:
1. Случайные события и вероятность
2. Основные теоремы теории вероятностей.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. **Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$. **Размещениями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$. **Сочетаниями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством: $A_n^m = P_m C_n^m$.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. **Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдет в результате испытания. **Случайным** называют событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате испытания. Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий. События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу: $p(A) = \dfrac{m}{n}$, где m - число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n - число всех возможных элементарных исходов испытания. Свойства вероятности:

- вероятность достоверного события равна 1;
- вероятность невозможного события равна 0;
- вероятность случайного события есть число, заключенное между 0 и 1

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически проведенных испытаний: $W(A) = \dfrac{m}{n}$, где m - число появления события A; n - общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания проводились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, чтобы испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Относительная частота обладает свойством устойчивости, которое заключается в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Она помогает количественно оценивать степень возможности наступления событий в условиях неопределённости. В фармацевтической технологии вероятностные методы применяются для:

- Оценки качества лекарственных средств (контроль примесей, однородности партии).
- Статистического анализа клинических испытаний и эффективности препаратов.
- Моделирования процессов производства (например, вероятность брака в таблетировании).
- Оценки рисков (стабильность препаратов, побочные эффекты).

Случайный эксперимент (опыт): Действие с непредсказуемым исходом (например, бросок монеты, извлечение таблетки из партии).

Элементарные исходы: Все возможные результаты эксперимента (пространство исходов Ω).

Случайное событие: Подмножество исходов, которое может произойти или не произойти.

Достоверное событие: Всегда происходит (P = 1).

Невозможное событие: Никогда не происходит (P = 0).

Случайное событие: 0 < P < 1.

Примеры событий:

A: "Таблетка соответствует стандарту по массе".

\bar{A}: "Таблетка бракованная" (противоположное событие, P(\bar{A}) = 1 - P(A)).

Виды событий

Несовместные: Не могут произойти одновременно (например, таблетка не может быть одновременно "белой" и "красной").

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1. Приведите основные формулы комбинаторики.
2. Что называют достоверным, невозможным, случайным событием?

Лекция № 2

1.Тема : Классическое определение вероятности, статистическая вероятность геометрическая вероятность.

2. Цель: Показать разные способы расчёта вероятности и их использование в равномерности покрытия.

3.Тезисы лекции:

План:

1.Классическое определение вероятности, статистическая вероятность геометрическая вероятность.
2. Основные теоремы теории вероятностей.
3. Повторение испытаний.

Наряду с классическим определением, используют и **статистическое определение вероятности**: в качестве статистической вероятности принимают относительную частоту события или число, близкое к ней.

Кроме того, чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят **геометрические вероятности** – вероятности попадания точки в область.

Основные теоремы теории вероятностей.

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Аналогично определяется сумма нескольких событий.

Теорема 1. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:* $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Теорема 2. *Сумма вероятностей событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *образующих полную группу, равна единице:*

$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\bar{A}$.

Теорема 3. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:* $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило. Условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, равна $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A)>0$.

Теорема 4. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:* $P(AB)=P(A)P_A(B)$.

Следствие 1. $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$.

Следствие 2. $P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$.

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, то есть безразлично, какое событие считать первым, вторым и так далее.

Событие B называют **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B, то есть если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P_A(B)=P(B)$. Отметим, что если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B, то есть свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB)=P(A)P_A(B)$ имеет вид $P(AB)=P(A)P(B)$, то есть вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют **независимыми**, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют **зависимыми**.

Несколько событий называют **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы. Несколько событий называют **независимыми в совокупности или просто независимыми**, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема 5. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$.

Теорема 6. *Вероятность появления хотя бы одного из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *независимых в* *совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий* $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$*:* $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

Следствие. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *имеют одинаковую вероятность, равную* p*, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:* $P(A) = 1 - q^n$.

Два события называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Теорема 7. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:* $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Теорема 1. *Вероятность события* A*, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий* $B_1, B_2, \ldots, B_n$*, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события* A*:* $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)$.

Эту формулу называют формулой полной вероятности.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. Вероятность появления события A определяют по формуле полной вероятности. Допустим теперь, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Поставим своей задачей определить, как изменились, в связи с тем, что событие A уже наступило, вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n)$. Условная вероятность любой гипотезы может быть вычислена по формуле: $P_A(B_i) = \dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$.

Полученные формулы называют формулами Бейеса. Они позволяют переоценить вероятность гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Повторение испытаний.

Формула Бернулли.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события** A**.** Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность. Воспользуемся понятием **сложного события**, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют **простыми**.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться или не появиться. Условимся считать, что вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. а именно равна p. Следовательно, вероятность не наступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$. Вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n-k$ раз, равна:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют формулой Бернулли.

Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. локальная теорема

Лапласа (или Муавра-Лапласа) дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше значение n) значению функции:*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad \text{при} \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, соответствующие положительным значениям аргумента x. Для отрицательных же значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз, или, как говорят, от k_1 до k_2 раз. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна:*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не выражается через элементарные функции. В таблице даны значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ для $x \geq 0$; для $x < 0$ пользуются той же таблицей, так как функция $\Phi(x)$ нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

В таблице приведены значения интеграла лишь до $x = 5$, так как для $x \geq 5$ можно принять $\Phi(x) = 0.5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют **функцией Лапласа**.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз. превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства: $np - q \leq k_0 < np + p$, причем а) если число $np-q$ - дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np-q$ - целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;

Отметим, что если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример: В партии 100 таблеток 5 бракованных. Вероятность извлечь бракованную: P = 5/100 = 0,05.

Пример в фармацевтике: Тест на примеси даёт положительный результат с вероятностью 0,95 у загрязнённой партии и ложноположительный 0,05 у чистой. Если 1% партий загрязнено, а тест положительный — вероятность реального загрязнения рассчитывается по теореме Байеса (около 0,16, показывая важность учёта базовой частоты).

Пример в фармацевтике: В партии 1000 таблеток 20 бракованных. Вероятность извлечь бракованную таблетку (без возвращения): P= $\frac{20}{1000}$ = 0,02

Пример в фармацевтике: При контроле растворения 500 таблеток из партии 12 не прошли тест. Статистическая вероятность несоответствия: P≈$\frac{12}{500}$ =0,024

Используется в приёмочном контроле партий, оценке стабильности и клинических исследованиях.

Применение в фармацевтике:

- Оценка равномерности покрытия таблеток плёночной оболочкой.
- Моделирование распределения активного вещества в объёме гранул.
- Расчёт вероятности попадания примеси в заданный диапазон размеров частиц.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1. Каково классическое определение вероятности?
2. Дайте определение относительной частоты.
3. Когда используются геометрические вероятности?

Лекция № 3

1.Тема : Дискретные случайные величины. Понятие случайной величины.

2. Цель: Ввести понятие СВ, закон распределения и числовые характеристики для моделирования числа бракованных единиц и дефектов.

3.Тезисы лекции:

План:

1.Дискретные случайные величины.

2.Понятие случайной величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину. которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая их вероятности:

$$\begin{matrix} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$$

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, то есть сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p, следовательно, вероятность не наступления также постоянна и равна $q = 1 - p$. Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появления события A в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины X. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, …, либо n раз. Таким образом возможные значения X таковы: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, …, $x_{n+1} = n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k = 0,1,2,\ldots,n$.

Закон распределения вероятностей, определяемый формулой Бернулли. называется биномиальным. Напишем его в виде таблицы:

$$\begin{matrix} X & n & n-1 & \dots & k & \dots & 0 \\ P & p^n & np^{n-1}q & \cdots & C_n^k p^k q^{n-k} & \cdots & q^n \end{matrix}$$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{e^{\lambda} \cdot k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Числовые характеристики ДСВ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(x)$ случайной величины X определяется равенством:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Математическое ожидание числа появления событий в одном испытании равно вероятности этого события. Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1 $M(C) = C$.

2 $M(CX) = CM(X)$.

3 $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Следствие. *Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

4 $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Теорема 1. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:* $M(X) = np$.

Пусть X - случайная величина и $M(X)$ - ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность $X - M(X)$. **Отклонением** называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием. Пусть закон распределения X известен:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Напишем закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения. Таким образом, отклонение имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X - M(X) & x_1 - M(X) & x_2 - M(X) & \cdots & x_n - M(X) \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Теорема 2. *Математическое ожидание отклонения равно нулю:* $M[X - M(X)] = 0$.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M[X - M(X)]^2$

Пусть случайная величина задана законом распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} [X - M(X)]^2 & [x_1 - M(X)]^2 & [x_2 - M(X)] & \cdots & [x_n - M(X)] \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Теорема 3. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:* $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Свойства дисперсии:

1 $D(C) = 0$.

2 $D(CX) = C^2 D(X)$.

3 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Следствие 2. $D(C+X) = D(X)$.

4 $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$

Теорема 4. *Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:* $D(X) = npq$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Теорема 5. *Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:* $\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}$.

Применение в фармацевтической технологии

Оценка среднего содержания активного вещества и его разброса в партии.

Контроль качества: допустимый процент брака (модель биномиального распределения).

Стабильность: среднее число деградированных молекул за время хранения.

Валидация процессов: анализ вариабельности массы, толщины покрытия таблеток.

Дискретные СВ — основа для дальнейшего изучения биномиального, Пуассона и других распределений, широко используемых в статистическом контроле качества лекарственных средств.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1. Понятие случайной величины (СВ)
2. Закон распределения дискретной СВ

Лекция № 4

1.Тема : Распределение вероятностей дискретной случайной величины.

2. Цель: Освоить биномиальное распределения для расчёта редких примесей в партиях.

3.Тезисы лекции:

План:

1. Распределение вероятностей дискретной случайной величины
2. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины

Функцией распределения или интегральной функцией случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть $F(x) = P(X < x)$.

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют **непрерывной**, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной. Свойства функции распределения:

1 $0 \le F(x) \le 1$.

2 $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в* *интервале* (a,b),*равна приращению функции распределения на этом интервале:* $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Следствие 2. *Вероятность того что непрерывная случайная величина* X *примет одно определенное значение, равна нулю.*

3 Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси* x*, то справедливы следующие предельные соотношения:* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной или производной функцией) непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Теорема 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b: $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Свойства плотности распределения:

1 $f(x) \ge 0$.

2 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Следствие. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* (a,b)*, то* $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$.

График плотности распределения называют **кривой распределения**.

Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, все возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют определенный интеграл $M(x) = \int\limits_a^b xf(x)dx$. Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a,b]$, то $D(x) = \int\limits_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$. Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Применение в фармацевтической технологии

- Описание вариабельности массы, содержания АВ, числа дефектов в партии.

- Расчёт допустимого уровня брака по фармакопее (используя биномиальное).
- Оценка числа загрязнений или микробных включений (Пуассон).
- Статистический контроль процессов (SPC) и валидация.

Закон распределения позволяет прогнозировать поведение СВ и устанавливать нормы качества лекарственных средств на основе вероятностных моделей.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение нормального закона распределения.
2. В чем заключается сущность правила «трех сигм»?
3. Приведите формулировку теоремы Ляпунова.

Лекция № 5

1.Тема : Нормальное и другие распределение вероятностей случайных величин.

2. Цель: Познакомить с нормальным распределением как основной моделью параметров лекарств

3.Тезисы лекции:

План:

1. Нормальное распределение.
2. Применение нормального распределения.

Нормальное распределение. Применение нормального распределения.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Вероятностный смысл этих параметров таков: a есть математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение нормального распределения. График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса).

Вероятность попадания в заданный интервал (α,β) **нормальной случайной величины** определяется по формуле: $P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Вероятность того, что **отклонение нормально распределенной случайной величины** X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, равна: $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. В частности, при $a=0$: $P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Правило трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения:* $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973\approx 1$.

Центральная предельная теорема Ляпунова. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Равномерное распределение.

Равномерным называется распределение непрерывной случайной величины X все значения которой лежат на отрезке [a;b] и имеют при этом постоянную плотность распределения

$$f(x)\begin{cases}0, если x \prec a\\ C, если b \prec x \prec a\\ 0, если x \succ b\end{cases}.$$

Площадь под кривой распределения равна 1 и поэтому $C=\dfrac{1}{b-a}$. $F(x)\begin{cases}0, если\ x \prec a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, если\ b \prec x \prec a\\ 1, если\ x \succ b\end{cases}.$

Вероятность попадания случайной величины Х на интервал от (α;β) $P(\alpha \prec x \prec \beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, α=a, если α<a, β=в, если β>в.

Основные числовые характеристики закона распределения плотности вычисляются по общим формулам и они равны $m_x=\dfrac{b+a}{2}$ $D_x=\dfrac{(b-a)^2}{2}$ $\sigma_x=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Показательное распределение.

Показательным называют распределение непрерывной случайной величины Х которое описывается следующей дифференциальной функцией $f(x)\begin{cases}0, если x \prec 0\\ xe^{-\lambda x}, если x \geq 0\end{cases}$

Экспоненциальное распределение для непрерывных случайных величин является аналогом распределения Пуассона для дискретных случайных величин и имеет следующий вид $F(x)=\begin{cases}0, если x \prec 0\\ 1-e^{-\lambda x}, если x \geq 0\end{cases}.$

Вероятность попадания случайной величины Х на интервал (α;β), а также числовые характеристики

$$P(\alpha \prec x \prec \beta)=e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}$$

определяются по формулам $m_x=\dfrac{1}{\lambda}$ $D_x=\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\sigma_x=\dfrac{1}{\lambda}$.

Следует отметить, что время безотказной работы удовлетворяется именно показательному закону, а поэтому это понятие часто используется в понятии надежности.

Распределения «хи квадрат» и Стьюдента.

Пусть X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ – нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно 0, а среднее квадратическое отклонение – 1. Тогда сумма квадратов этих величин $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с $k=n$ степенями свободы; если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k=n-1$. Плотность распределения «хи квадрат»

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \leq 0,\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1}, & x>0,\end{cases}$$

где $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ - гамма-функция; в частности

$\Gamma(n+1) = n!$.

Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» определяется одним параметром – числом степеней свободы k. С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

Пусть Z - нормальная случайная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V - независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{k}}}$ имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента с k степенями свободы. С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема Чебышева. *Если* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа* C*), то, как бы мало ни было положительное число* ε*, вероятность неравенства*

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Другими словами, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left| \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \dfrac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$.

Следствие. *Если* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *- попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание* a*, причем дисперсии их равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число* $\varepsilon > 0$*, вероятность неравенства* $\left| \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Другими словами, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left| \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1$.

Теорема Бернулли. *Если в каждом из* n *независимых испытаний вероятность* p *появления события* A *постоянна, то как угодна близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности* p *по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико. Иными словами, для любого* $\varepsilon > 0$*:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Применение в фармацевтической технологии

Нормальное:

Масса таблеток, содержание активного вещества, диаметр гранул, толщина покрытия — обычно подчиняются нормальному закону.

Установление спецификаций: ±3σ от среднего.

Контроль качества (карты Шухарта, Cpk).
4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.
5. Литература: см. приложение № 1
6. **Контрольные вопросы**
1. Основные типы распределений случайных величин
2. Приведите формулу Чебышева

Лекция № 6

1.Тема : Закон больших чисел.
2. Цель: Обосновать надёжность выборочного контроля: средние по выборке отражают характеристики всей партии при большом n.
3.Тезисы лекции:
План:
1. Понятие закона больших чисел
2. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Понятие закона больших чисел (ЗБЧ)

Закон больших чисел — фундаментальный закон теории вероятностей, утверждающий, что при большом числе независимых испытаний **среднее наблюдаемое значение** случайной величины **стремилось к её математическому ожиданию**.
Иначе: эмпирическое (наблюдаемое) среднее → теоретическое среднее при росте числа опытов.

Формулировки

1. **Теорема Чебышёва** (слабый ЗБЧ): Для независимых СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковым $M(X_i) = \mu$ и ограниченной дисперсией: среднее арифметическое \bar{X}_n = $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, приближается к μ при $n \to \infty$.
2. **Теорема Бернулли** (частный случай для биномиального): Относительная частота успеха $\frac{k}{n} \to p$ (вероятность успеха в одном испытании) при $n \to \infty$.

Математическая запись (Чебышева) $P(|\bar{X}_n-\mu|<\varepsilon)\to 1$ при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.
Дисперсия среднего уменьшается как $\frac{1}{n}$: $D(\bar{X}_n)=\frac{D(X)}{n}$

Примеры в фармацевтической технологии

1. **Контроль массы таблеток**: Средняя масса одной таблетки μ = 200 мг, σ = 5 мг. При контроле 100 таблеток средняя масса выборки \bar{X} почти наверняка будет очень близка к 200 мг.
2. **Процент брака в партии**: Теоретический процент брака p = 0,01 (1%). При проверке 1000 таблеток наблюдаемый процент брака ≈ 1% с высокой вероятностью.
3. **Содержание активного вещества (АВ)**: Среднее содержание АВ в партии μ = 100%. Чем больше таблеток анализируем, тем точнее оценка среднего содержания.
4. **Стабильность препарата**: При многократных испытаниях на растворение средний результат → нормативному значению.

Значение ЗБЧ в фармацевтике

Обосновывает использование **выборочного контроля** вместо 100% проверки партии.
Лежит в основе статистического контроля качества (SPC), валидации процессов.
Позволяет доверять средним значениям, полученным в лабораторных анализах и клинических исследованиях.
4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.
5. Литература: см. приложение № 1
6. **Контрольные вопросы**
1. Понятие закона больших чисел
2. Центральная предельная теорема Ляпунова
3. В чем смысл теоремы Бернулли?

Лекция № 7

1.Тема : Системы случайных величин.

2. Цель: Научить анализировать взаимосвязи параметров (масса и содержание АВ).

3.Тезисы лекции:

План:

1. Системы случайных величин. Закон распределения системы двух случайных величин.
2. Статистические совокупности. Генеральная и выборочная совокупности.

Двумерные случайные величины. Числовые характеристики.

Двумерной случайной величиной называется система из двух одномерных случайных величин X, Y, где как X, так и Y являются дискретными случайными величинами. В пространстве элементарных событий дискретной случайной величены XY определим сложное событие A: В результате испытания над двумерной случайной величиной XY, случайная величина X приняла значение x_i, случайная величина Y - любое значение.

$$A{:}\{x_i y_i,\ ...,\ x_i y_m\} \qquad P(A) = P(X = x_i) = P(\sum_{j=1}^{m}(x_i y_j)) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i y_j) = P(x_i)$$

Вводим сложное событие В: В результате испытания над двумерной случайной величиной XY, случайная величина Y приняла значение y_j.

$$B{:}\{x_1 y_j,\ ...,\ x_s y_j\} \qquad P(B) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i y_j) = P(y_j)$$

Найдем условную вероятность:

$$P(B/A) = P(y = y_j / x = x_i) = P(y_j / x_i) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(x_i y_j)}{P(x = x_i)} = \frac{P(x_i y_j)}{P(x_i)}$$

Аналогично:

$$P(A/B) = P(x = x_i / y = y_j) = P(x_i / y_j) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(x_i y_j)}{P(y = y_j)} = \frac{P(x_i y_j)}{P(y_j)}$$

Покажем что сумма условных вероятностей: $\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) = 1$; $\sum_{i=1}^{s} P(x_i / y_j) = 1$

Условным математическим ожиданием является выражение:

$$M(y / x = x_i) = \overline{y}(x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j / x_i)\ ; \qquad M(x / y = y_j) = \overline{x}(y_j) = \sum_{i=1}^{s} x_i P(x_i / y_j)$$

Условной дисперсией называется выражение:

$$D(y / x = x_i) = \sigma^2 y / x_i = \sum_{j=1}^{m} (y_j - \overline{y}(x_i))^2 \times P(y_j / x_i)\ ;$$

$$D(x / y = y_j) = \sigma^2 x / y_j = \sum_{i=1}^{s} (x_i - \overline{x}(y_j))^2 \times P(x_i / y_j)\,.$$

Двумерная случайная величина называется непрерывной случайной величиной, если пространством ее элементарных событий является плоскость, либо область плоскости, либо область конечной ненулевой плоскости. Очевидно что X и Y являются одномерными непрерывными случайными величинами.

Следствием этого определения является следующее: любое сложное событие размерности 1 (произвольная кривая, принадлежащая пространству элементарных событий) имеет нулевую вероятность т.к. в противном случае вероятность достоверного события никогда бы не равнялась единице. Числовая скалярная функция двух действительных аргументов называется двумерной плотностью вероятности, двумерной случайной величины XY, если для фиксированных значений своих аргументов она выполняет равенство $f(x,y)\Delta x\Delta y = P\begin{pmatrix} x \le X \le x+\Delta x \\ y \le Y \le y+\Delta y \end{pmatrix}$.

Приведенное здесь определение является аналогичным определению одномерной плотности вероятности.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)\Delta x + O(\Delta x) = P(x \le X \le x+\Delta x)$$

Условие существования плотности вероятности для фиксированных x, y:

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)}$$

Числовая скалярная функция двух действительных аргументов называется <u>двумерной функцией распределения</u>, если она при фиксированном числе своих аргументов численно равна вероятности наступления $F_{x,y}(x,y)=P(X \le x,\ Y \le y)$, если X, y - непрерывные случайные величины, то значение функции распределения не изменится.

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(U,V)dVdU$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

$$P((X,Y) \subset G) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) - F(x,y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X,Y) \subset G)}{\Delta x \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Найдем по двумерной плотности одномерные плотности случайных величин X и Y.

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u)du$$

$$P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y=\infty} f(u,v)dvdu = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_x(u)du = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu$$

Т.к. полученное равенство верно для всех x, то подынтегральные выражение $f_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dv$

Условная плотность вероятности.

Найдем плотность вероятности случайной величины Y при условии, что в результате испытания над случайной величиной XY , X приняло значение x. Обозначим $f_{y/x}\left(y/x\right)$

$$P\left(y \le Y \le y + \Delta y / x = x\right) = f_{y/x}\left(y/x\right)\Delta y + 0\left(\Delta y\right)$$

В качестве условной плотности вероятности используется следующее выражение $\boxed{f_{y/x}\left(y/x\right) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}}$

Условное мат. ожидание и дисперсия линии регрессии - зависимость Y от X, выраженная в изменении средних значений Y при переходе x от одного значения к другому.

5. Применение в фармацевтической технологии

Анализ связи между параметрами: масса и растворимость, толщина покрытия и скорость высвобождения АВ.

Корреляционный анализ в валидации процессов (влияние температуры на однородность).

Множественная регрессия для оптимизации рецептуры.

Оценка взаимосвязи примесей и стабильности препарата.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.

5.Литература:

Основная:

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013.-320 с.

2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.

3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.

4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.

5. Математика. 1-бөлім: оқулык / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014. - 144 бет.

6. Математика. ІІ-бөлім: оқулык / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.

7. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.

8. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы/ Н.Қ.Аширбаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304 б.

9. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.

2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет

3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102 эл. опт.

дис
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Кощанова Г.Р. Математика 1: оқу құралы, -Алматы 2019, 226 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2080
6. Кошанова Г.Р. Математика 2: оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
7. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С. Қыдырбаева. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
8. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
9. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
10. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.-136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/
11. Жұмабаев Қ.Ж. Жоғары математика (кеңістіктегі аналитикалық геометрия, анықтауыштар мен матрицалар, сызықтық теңдеулер): практикум / Қ.Ж. Жұмабаев, Р А. Жұмабаева.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2024.- 169 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/143330.html
12. Тестовые вопросы по теории вероятностей: учебно-методическое пособие / В. Д. Проценко, Е. А. Лукьянова, Т. В. Ляпунова [и др.].- Москва: РУДН, 2017.- 68 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/91081.html
13. Құралова Ұ.Ә. Жоғары математика негіздері: оқу құралы / Ұ.Ә. Құралова, Г.Е. Жидекұлова.- Тараз: Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, 2019.- 256 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/127267.html
14. Мальцева Ж.Л. Математика для студентов-медиков. В 4 частях. Ч.1. Начала линейной алгебры: учебное пособие / Ж. Л. Мальцева, С. В. Мальцева, О. В. Рязановская.- Новосибирск: НГУ, 2023.- 112 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/134642.html
15. Алдибаева Л.Т. Тізбектің және функцияның шегі: оқу құралы.- Алматы: Нур-Принт, 2014.- 129 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/67161.html
16. Куттыгожина А.С. Жоғары математика негіздері: оқулық.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2025.- 212 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/149969.html
17. Matthew A. Rewald, Bradley A. Lorang, Garrett E. Schramm. Pharmacy Calculations: An Introduction for Pharmacy Technicians: An Introduction for Pharmacy Technicians.- [Place of publication not identified] : ASHP.- 2021. // eBook Medical Collection EBSCO

6. **Контрольные вопросы**

1. Системы случайных величин
2. Условная плотность вероятности.

Лекция № 8

1.Тема: Системы случайных величин. Закон распределения системы двух случайных величин.
2. Цель: Освоить совместные условные распределения для изучения зависимостей технологических параметров.

3.Тезисы лекции:

План:

1. Закон распределения системы двух случайных величин.
2. Независимые непрерывные двумерные случайные величины.

Двумерные независимые дискретные случайные величины

Двумерная дискретная случайная величина называется случайной величиной с <u>независимыми компонентами</u>, если $P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$. Справедливы равенства

$$P(y_j / x_i) = P(y_j)$$

$$P(x_i / y_j) = P(x_i)$$

$$\bar{y}(x_i) = MY$$

$$\bar{x}(y_j) = MX$$

$$\sigma^2 Y / x_i = \sigma^2 y$$

Если испытание, исходом которого является пара чисел $x_i y_j$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,s}$ является композицией двух независимых испытаний, то случайные величины X Y независимы.

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(y_j)P(x_i)}{P(x_i)} = P(y_j)$$

$$\bar{y}(x_i) = \sum_{j=1}^{s} y_j P(y_j / x_i) = \sum_{j=1}^{s} y_j \frac{P(y_j)P(x_i)}{P(x_i)} = \sum_{j=1}^{s} y_j P(y_j) = MY$$

$$\sigma^2 Y / x_i = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \bar{y}(x_i)\right)^2 P(y_j / x_i) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - MY)^2 P(y_j x_i) / P(x_i) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - MY)^2 P(y_j) = \sigma^2 y$$

Независимые непрерывные двумерные случайные величины.

Непрерывная двумерная случайная величина имеет <u>независимые случайные компоненты</u>, если

$$F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$$

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Если двумерная непрерывная случайная величина XY порождена композицией независимых испытаний, то X и Y независимы.

Математическое ожидание скалярной функции случайных аргументов.

Числовая скалярная функция $\varphi(x,y)$ является одномерной дискретной случайной величиной, со следующим отличием от обычного представления: для того, чтобы в испытании получить реализацию $\varphi(x_i, y_i)$ необходимо провести испытание над двумерной случайной величиной XY, зафиксировать ее результат xi,yi и подставить в $\varphi(x_i, y_i)$. Полученное число и есть реализация случайной величины φ. Таблица случайной величины строится по таблице

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(x_i, y_j) \\ P(x_i, y_j) \end{matrix}\right\} \quad i = \overline{1,5};\ j = \overline{1,m}$$

$$M\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i y_j) P(x_i y_j)$$

Двумерные непрерывные случайные величины

$$M\varphi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i y_j) f_{xy}(x_i y_j) dxdy$$

Случайную величину $\varphi(x,y)$ аппроксимируем дискретной по следующему правилу: пространство элементарных событий XY представим в виде совокупности прямоугольников с вершинами x_i, y_j, если в результате испытания XY попало в прямоугольник (i,j), то эта случайная величина приняла значение $\varphi(x_i, y_j)$. Вероятность наступления этого события равна:

$$f_{xy}(x_i y_j)\Delta x_i y_j + 0(\Delta x_i \Delta y_j)$$

$$M\varphi^*(x,y) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) f_{xy}(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j + 0(\Delta x_i \Delta y_j)$$

точное значение мат. ожидания

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_{ji} \to 0}} M\varphi^*(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i y_j) f(x_i y_j) dxdy$$

Теорема. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению мат.ожиданий.*

По определению имеем $M(XY) = \sum_{(x,y)} xyP(x,y)$ т.к. случайные величины X и Y независимы, то

$$P(x,y) = P_x(x)P_y(y) \quad M(XY) = \sum_{(x,y)} [xP_x(x)] \cdot [yP_y(y)] = \left(\sum_x xP_x(x)\right) \cdot \sum_y yP_y(y) = MX \cdot MY$$

Корреляционный момент. Коэффициенты ковариации и корреляции.

Коэффициентом ковариации называется выражение

$$\mathrm{cov}(X,Y) = M[(X-MX)(Y-MY)] = M[XY - XMY - YMX + MX \cdot MY] =$$

$$= M[XY - XMY - YMX + MX \cdot MY] = MXY - 2MX \cdot MY + MX \cdot MY = MXY - MX \cdot MY$$

Пусть $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{l=1}^{k} \varphi(x_{l_1},\dots,x_{l_n})$. Тогда

$$M\varphi(x_1,\dots,x_n) = M\sum_{l=1}^{k} \varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}) = \sum_{l=1}^{k} M\varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}})$$

$$M\varphi(x_1,\dots,x_n) = M\sum_{l=1}^{k} \varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}) f(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}) f_{x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}}(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}}) dx_{l_1}\dots dx_{l_{kl}} = \sum_{l=1}^{k} M\varphi_l(x_{l_1},\dots,x_{l_{kl}})$$

Если случайные величины XY независимы, то их коэффициент ковариации равен нулю, обратное в общем случае неверно.

Случайная величина $\frac{X-MX}{\sigma x}$ называется <u>нормированной</u> случайной величиной, ее мат.ожидание равно 0, а дисперсия -1.

$$\frac{M(X-MX)}{\sigma x} = \frac{1}{\sigma x} M(X-MX) = \frac{(MX-MX)}{\sigma x} = 0 \qquad D\left(\frac{X-MX}{\sigma x}\right) = \frac{1}{\sigma x} D(X-MX) = \frac{DX}{\sigma x^2} = \frac{\sigma x^2}{\sigma x^2} = 1$$

<u>Коэффициентом корреляции</u> случайных величин X и Y - это число

$$\rho_{xy} = \mathrm{cov}(X^*, Y^*) = \frac{M(X-MX)(Y-MY)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad X^* = \frac{X-MX}{\sigma_x} \qquad Y^* = \frac{Y-MY}{\sigma_y}$$

$$D(X \pm Y) = DX \pm 2\,\mathrm{cov}(XY) + DY$$

Следствие:

Если X и Y независимы, то коэффициент ковариации равен 0 и $D(X \pm Y) = DX \pm DY$.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le \rho_{xy} \le 1$

2. Если $|\rho_{xy}| = 1$, то с вероятностью 1 X и Y связаны линейно. $\rho_{xy} = 1$

Рассмотрим X*-Y*, отсюда M(X*-Y*)=0. $D\left(X^* - Y^*\right) = 1 + 1 - 2\rho_{xy} = 1 + 1 - 2 = 0$

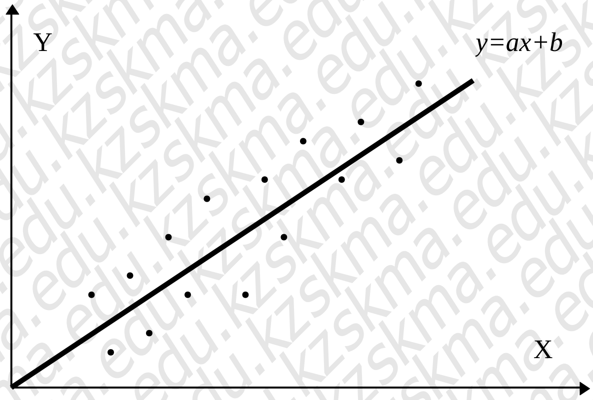
Если X и Y дискретные случайные величины, и дисперсия равна 0, то их сумма (разность) является постоянной $X^* - Y^* = 0$ $\quad M\left(X^* - Y^*\right) = 0$

Пусть X и Y непрерывные случайные величины, то в соответствии с неравенством Чебышева

$$P\left(|X - MX| \ge \varepsilon\right) \le \frac{DK}{\varepsilon^2} \text{ т.к. } D\left(X^* - Y^*\right) = 0 \quad P\left(\left|X^* - Y^*\right| \ge \varepsilon\right) = 0 \;\Rightarrow\; X^* = Y^* \;\Rightarrow\; y = ax + b$$

Это неравенство и обозначает, что с вероятностью 1 $\frac{x - \nu_x}{\sigma_x} = \frac{y - \nu_y}{\sigma_y}$, откуда y=ax+b, где $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \nu_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\nu_x$.

Если коэффициент корреляции $|\rho_{xy}| = 1$, то результаты опыта лежат на прямой



В общем случае Y можно представить в виде $y = ax + b + z \quad DZ = \sigma_y^2\left(1 - \rho_{xy}\right)^2$

Коэффициент корреляции является мерой близости линейной связи между случайными величинами X и Y: чем ближе коэффициент корреляции по модулю к 1, тем более тесно результаты конкретного испытания над X и Y соотносятся с прямой ax+b.

Статистические совокупности. Генеральная и выборочная совокупности. Способы отбора. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма.

Статистические совокупности. Генеральная и выборочная совокупности.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследований (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Выборочной совокупностью или просто **выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов. **Генеральной совокупностью** называют совокупность объектов, из которых производится выборка. **Объемом совокупности** (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. **Бесповторной** называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты правильно его представляли, то есть выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. В этом случае выборка называется **репрезентативной (представительной)**.

Способы отбора.

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно разделить на два вида.

1 Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся простой случайный бесповторный отбор и простой случайный повторный отбор.

2 Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся типический, механический и серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Он может быть **повторным** или **бесповторным** в зависимости от того, возвращают ли отобранный объект в генеральную совокупность перед извлечением следующего, или нет.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из некоторой ее «типической» части. **Механическим** называют такой отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, и из каждой группы отбирают один объект. **Серийным** называют такой отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

Статистическое распределение выборки.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, - **вариационным рядом**. **Статистическим распределением выборки** называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот w_i (сумма всех относительных часто равна 1). Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$: $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x - число вариант, меньших x; n - объем выборки. Эмпирическая функция обладает следующими свойствами.

1 $0 \le F^*(x) \le 1$.

2 $F^*(x)$ - неубывающая функция, то есть $F^*(x_2) \ge F^*(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3 Если x_1 - наименьшая варианта, а x_k - наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Полигон и гистограмма.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_k, n_k), где x_i - варианты выборки, n_i - соответствующие им частоты. **Полигоном относительных**

частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k), где x_i - варианты выборки, w_i - соответствующие им относительные частоты.

При непрерывном распределении признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на ряд частичных интервалов длины h и находят n_i - сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ - сумме частот вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h \cdot \frac{w_i}{h} = w_i$ - относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть 1.

Примеры в фармацевтике

(X, Y): масса таблетки (X) и % содержания АВ (Y) — совместное распределение для контроля качества.

Толщина покрытия на верхней (X) и нижней (Y) сторонах таблетки.

Независимость: если процесс грануляции и сушки не влияют друг на друга.

Совместный закон распределения позволяет анализировать взаимосвязи параметров процесса и продукции, что необходимо для валидации, оптимизации и обеспечения стабильности качества лекарственных средств.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1. Что называется двумерной случайной величиной?
2. Приведите формулу условной плотности вероятности.
3. Что называется эмпирической функцией распределения?

Лекция № 9

1.Тема : Статистические совокупности. Генеральная и выборочная совокупности.

2. Цель: Разъяснить разницу между генеральной совокупностью (партия) и выборкой, обосновать выборочный контроль качества.

3.Тезисы лекции:

План:

1. Статистические совокупности.
2. Генеральная и выборочная совокупности.

Статистические оценки параметров распределения. Несмещённые, состоятельные оценки. Интервальные оценки.

Проверка статистических гипотез. Критерий χ^2 и его применение к проверке гипотезы о виде

распределения.
Применение в фармацевтике:
Приёмочный контроль партий (AQL, планы выборочного контроля по ГОСТ/ISO 2859).
Оценка среднего содержания АВ и его вариабельности.
Валидация процессов: сравнение выборочных данных с нормативными пределами.
Системы СВ и выборочный метод позволяют анализировать взаимосвязи параметров и делать надёжные выводы о качестве всей партии на основе ограниченной выборки.
4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.
5. Литература: см. приложение № 1
6. **Контрольные вопросы**
1. Дайте определение генеральной и выборочной совокупности.
2.Какие виды выборок вы знаете?
3.Приведите примеры, соответствующие основным видам статистического отбора.

Лекция № 10

1.Тема : Несмещённые, состоятельные оценки. Интервальные оценки.
2. Цель: Научить получать надёжные оценки параметров партии по выборке и указывать доверительные интервалы для принятия решений о приёмке/браковке.
3.Тезисы лекции:

Статистической оценкой Θ^* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. **Точечной** называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка). **Несмещенной** называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. **Смещенной** называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру. **Эффективной** называют статистическую оценку, которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию. **Состоятельной** называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Оценка генеральной средней выборочной средней.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя $\bar{x}_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$, где x_i - варианта выборки, n_i - частота варианты x_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ - объем выборки.

Генеральная дисперсия. Выборочная дисперсия

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия: $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$. Эта оценка является смещенной, так как $M(D_B) = \dfrac{n-1}{n} D_\Gamma$. Более удобной является формула $D_B = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\dfrac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2$.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$s^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}$. Более удобна формула $s_X^2 == \dfrac{\sum n_i x_i^2 - \dfrac{\left[\sum n_i x_i\right]^2}{n}}{n-1}$.

Метод моментов.

Оценка одного параметра. Пусть задан вид плотности распределения $f(x,\theta)$, определяемый одним неизвестным параметром θ. Требуется найти точечную оценку параметра θ. Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение этого параметра. Следуя методу моментов, приравняем начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту: $\nu_1 = M_1$ или $M(x) = \bar{x}_B$. Математическое ожидание $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,\theta)dx = \varphi(\theta)$ есть функция от θ, поэтому соотношение $M(x) = \bar{x}_B$ или $\varphi(\theta) = \bar{x}_B$ можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным θ. Решив это уравнение относительно параметра θ, найдем его точечную оценку θ^*, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки: $\theta^* = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения $f(x,\theta_1,\theta_2)$, определяемый неизвестными параметрами θ_1 и θ_2. Для отыскания двух параметров необходимы два уравнения относительно этих параметров. Следуя методу моментов, приравняем начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\nu_1 = M_1,\ \mu_2 = m_2 \qquad \text{или} \qquad M(x) = \bar{x}_B,\ D(X) = D_B.$$

Математическое ожидание и дисперсия есть функции от θ_1 и θ_2, поэтому два последних соотношения можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными θ_1 и θ_2 .уравнение с одним неизвестным θ. Решив эту систему, получим их точечные оценки, которые являются функциями от вариант выборки.

$$\theta_1^* = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \theta_2^* = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Метод максимального правдоподобия.

Дискретные случайные величины. Пусть X - дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку. Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i, через $p(x_i,\theta)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента θ: $L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = p(x_1,\theta)p(x_2,\theta)\ldots p(x_n,\theta)$. В качестве точечной оценки параметра θ принимают такое его значение $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Максимум функции правдоподобия L (иногда вместо функции правдоподобия берут, для удобства, логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L$) ищут методами дифференциального исчисления.

Непрерывные случайные величины. Пусть X - непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что вид плотности распределения $f(x)$ задан, но неизвестен параметр θ, которым определяется эта функция. **Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины** X называют функцию аргумента θ: $L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)$. Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как и в случае дискретной случайной величины.

Доверительная вероятность.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. **Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. θ^* тем точнее определяет параметр θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\theta-\theta^*|$. Другими словами, если $\delta>0$ и $|\theta-\theta^*|<\delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует **точность оценки**.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta-\theta^*|<\delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к 1, например 0,95; 0,99; 0,999. **Доверительным** называют интервал $(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Доверительные интервалы для оценки параметров распределений.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$. Доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью γ, имеет вид $\left(\bar{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, точность оценки $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Число t определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$ или $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$. По таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$. Доверительный интервал, покрывающий параметр a с надежностью γ, имеет вид $\left(\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$, точность оценки $\delta=\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. Число t_γ определяется по специальной таблице по заданным n и γ, s - «исправленное» среднее квадратическое отклонение выборки.

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s. Вычислив по выборке s и найдя по специальной таблице q (по заданным n и γ), получим доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надежностью γ: $s(1-q)<\sigma<s(1+q)$.

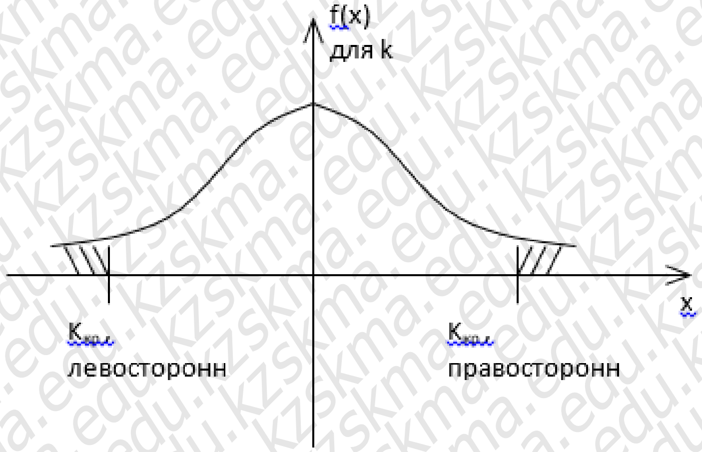
Оценка вероятности биномиального распределения по относительной частоте. Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Требуется оценить неизвестную вероятность p по относительной частоте, то есть надо найти ее точечную и интервальную оценки. В качестве точечной оценки неизвестной вероятности p принимают относительную частоту $w=\dfrac{m}{n}$, где m - число появлений события A, n - число испытаний. Дисперсия оценки $D(w)=\dfrac{pq}{n}$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_w=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.
Доверительный интервал для оценки вероятности по относительной частоте с заданной надежностью γ имеет вид: $p_1<p<p_2$,

где $$p_1=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}-t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],\quad p_2=\frac{n}{t^2+n}\left[w+\frac{t^2}{2n}+t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

t - значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$.

2. Проверка статистических гипотез. Критерий χ^2 и его применение к проверке гипотезы о виде распределения.
В статистике рассматриваются гипотезы двух типов:
1. **Параметрические** – гипотезы о значении параметра известного распределения;
2. **Непараметрические** – гипотезы о виде распределения.

Обычно выделяют основную гипотезу – **нулевую** (H0). Пример: математическое ожидание признака ξ, который распределен по нормальному закону и дисперсия его известна, а H0: M(ξ) = a. Предполагаем, что известна дисперсия Конкурирующая гипотеза имеет вид: H1: M(ξ) ≠ a; H1: M(ξ) > a, либо H1: M(ξ) = a1. Для проверки гипотез используются критерии, и они представляют собой специальным образом подобранные СВ, k – точечный или приближенный закон, который известен.



Обычно предполагается, что если гипотеза H0 выполняется, то вычисляемая по выборочным данным kнабл. Этого критерия и гипотеза H0 принимается, если kнабл.∈ (kкритич. левостор.; kкритич. правостор.) Если kнабл. попадает в критическую область (все остальные значения k ∈(- ∞ ; kкритич. лев.) ∪ (kкритич. прав. ; ∞), то гипотеза H0 отвергается и принимается конкурирующая гипотеза H1. При этом возможны ошибки двух типов: Первого рода: что гипотеза H0 отвергается, в то время, как она верна. Вероятность этой ошибки: P(H1/H0) = α - уровень значимости критерия. Критерий подбирается так, чтобы α была как можно меньше. Второго рода: что отвергается гипотеза H1, в то время, как она верна. β = P(H0/H1) Мощностью критерия – (1-β) - вероятность попасть точке-выборке в критическое множество, когда верна конкурирующая гипотеза. 1-β = P(H1/H1)

По независимым выборкам, объемы которых n1, n2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s^2*x и s^2*y. Требуется сравнить эти дисперсии.

Правило I. Для того чтобы при заданном уровне значимости α, проверить нулевую гипотезу H_Q: D(X) = D(Y) о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе Ho: D (X) > D (Y), надо вычислить наблюдаемое значение критерия (отношение большей исправленной дисперсии к меньшей) $F_{набл} = s_Б^2/s_М^2$ и по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора, по заданному уровню значимости а и числам степеней свободы k_1=n1—1, k_2 = n2—1 (k1—число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{KP}(a; k_1, k2)$. Если Fнабл < Fкр— нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если Fна,л > Fкр — нулевую гипотезу отвергают.

Правило 2. При конкурирующей гипотезе H1: D(X)≠D(Y) критическую точку F_{KP} (α/2; k_1 ,k2) ищут по уровню значимости а/2 (вдвое меньшему заданного) и числам степеней свободы k1 и k_2 (k1—число степеней свободы, большей дисперсии). Если $F_{НАБЛ}$ < Fкр — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если Fнабл > Fкр — нулевую гипотезу отвергают.

Разобьем множество возможных значений случайной величины X Hav разрядов (для непрерывной случайной величины роль разрядов играют интервалы значений, а для дискретной — отдел ь-ные возможные значения или их группы). Выдвинем нулевую гипотезу H_o: $F_x(x)$ = Fтеор(x) (состоящую в том, что генеральная совокупность распределена по закону Fтеор(x)) при альтернативной гипотезе H1: $F_x(x) \neq F_{Теор}(x)$. Одним из критериев согласия выборочного и теоретического распределений (т.е. критериев соответствия генеральной совокупности определенному закону распределения) является критерий X^2 (критерий Пирсона), который основывается на том, что распределение статистики $\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(n_i - np_i^{теор})^2}{np_i^{теор}}$, (где л, — число попаданий элементов выборки в i-й разряд, п - общее число элементов выборки, $api^{теор}$ — теоретическая вероятность попадания случайной величины X в i-и разряд при условии истинности нулевой гипотезы) не зависит от выдвинутой гипотезы и определяется только числом степеней свободы k = v — l — 1, где v — число разрядов, a l — число оцениваемых параметров. Формулы закона распределения случайной величины X^2 довольно сложны, и мы их приводить не будем, но для этого распределения составлены таблицы значений $X^2_{k;y}$ таких, что P{X^2 < $X^2_{k;y}$ } = γ (табл. П. 3).

Если выбрать уровень значимости а, то надежность γ = 1 — а = — P{X^2 < $X^2_{k;y}$ } и критическая область определяется неравенством X^2 набл< $X^2_{k;y}$

Обратим внимание на то, что критерий Пирсона можно использовать только в том случае, когда $np^{теор} \geq 5$, поэтому разряды, для которых это условие не выполняется, необходимо объединить с соседними.

4. Применение в фармацевтической технологии

- Оценка среднего содержания АВ в партии (\bar{x} ± погрешность).
- Доверительный интервал для процента брака или несоответствующих таблеток.
- Оценка вариабельности массы, толщины покрытия, скорости растворения.
- Валидация аналитических методик: доверительные интервалы для точности и прецизии.
- Приёмочный контроль партий по фармакопее (например, USP, Ph. Eur.) — требуют указания доверительных интервалов.

4. Иллюстрационный материал: Презентация, слайд.

5. Литература: см. приложение № 1

6. **Контрольные вопросы**

1.Что является несмещенной оценкой генеральной средней?
2.Что является смещенной оценкой генеральной дисперсии?
3.Как определяется несмещенная оценка генеральной дисперсии?

Приложение № 1

Литература:

- **Основная:**

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013.-320 с.
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
6. Математика. II-бөлім: окулык / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
7. Базарбекова А.А. Жоғары математика: окулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
8. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы/ Н.Қ.Аширбаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304 б.
9. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

- **Дополнительная:**

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

- **Электронные публикации:**

1. Иванова, М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 102 эл. опт. дис
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. – 174 с. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Кошанова Г.Р. Математика 2: оқу құралы: Алматы 2019, 129 б. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
6. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
7. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
8. Құдабаев Қ.Ж. Мататматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.-136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/
9. Жұмабаев Қ.Ж. Жоғары математика (кеңістіктегі аналитикалық геометрия, анықтауыштар мен матрицалар, сызықтық теңдеулер): практикум / Қ.Ж. Жұмабаев, Р А. Жұмабаева.- Алматы, Москва:

EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2024.- 169 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/143330.html
10. Тестовые вопросы по теории вероятностей: учебно-методическое пособие / В. Д. Проценко, Е. А. Лукьянова, Т. В. Ляпунова [и др.].- Москва: РУДН, 2017.- 68 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/91081.html
11. Құралова Ұ.Ә. Жоғары математика негіздері: оқу құралы / Ұ.Ә. Құралова, Г.Е. Жидеқұлова.- Тараз: Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, 2019.- 256 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/127267.html
12. Алдибаева Л.Т. Тізбектің және функцияның шегі: оқу құралы.- Алматы: Нур-Принт, 2014.- 129 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/67161.html
13. Куттыгожина А.С. Жоғары математика негіздері: оқулық.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2025.- 212 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/149969.html
14. Matthew A. Rewald, Bradley A. Lorang, Garrett E. Schramm. Pharmacy Calculations: An Introduction for Pharmacy Technicians: An Introduction for Pharmacy Technicians.- [Place of publication not identified] : ASHP.- 2021. // eBook Medical Collection EBSCO